

# Implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas, apoyada en el software GeoGebra y el modelo de Van Hiele

**Mauricio Rodríguez Sánchez**  
Ministerio de Educación Pública  
[mauriciorods@gmail.com](mailto:mauriciorods@gmail.com)

**Eithel Trigueros Rodríguez**  
Universidad Nacional de Costa Rica  
[eitheltr@gmail.com](mailto:eitheltr@gmail.com)

**Resumen:** Se presentan los avances de una propuesta de trabajo final de graduación, cuyo objetivo principal es desarrollar habilidades para el aprendizaje de razones trigonométricas en noveno año, por medio de una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele, en el Liceo Rural Gavilán, Valle la Estrella, Limón, durante el segundo trimestre del 2016.

**Palabras clave:** Etnomatemática, material didáctico, educación intercultural.

## Introducción

El Liceo Rural Gavilán pertenece al circuito 06 de la Regional Educativa de Sulà del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). El Liceo Rural Gavilán junto con el Colegio Técnico Profesional de Talamanca son las únicas instituciones de la Regional Sulà que se encuentran fuera de reservas indígenas. Es decir, reciben un importante número de estudiantes indígenas, pero no están ubicados dentro del territorio indígena. Sin embargo, el colegio es de difícil acceso, pues no existe transporte público para la comunidad de Vesta (lugar donde se encuentra el colegio), lo que obliga a las personas a utilizar el transporte privado o bien una ruta de bus a una comunidad cercana. Además, la zona tiene la afluencia de gran cantidad de riachuelos que en temporada de lluvia imposibilitan el paso a los habitantes y por tanto a los estudiantes.

Esto provoca un problema del ausentismo en la población estudiantil. En términos generales los estudiantes pueden caminar entre un rango de una hora a hora y media para llegar a la institución tanto los provenientes de las comunidades Progreso, Llano Grande, como los provenientes de la reserva Cábecar Tjai. Como medida de solución a dicho problema la Dirección de la institución, encargados/as del estudiantado y la Junta Administrativa lograron un subsidio para transporte de estudiantes, el cual empezó a dar servicio a finales de agosto del 2015.

Este es, a grandes rasgos, el contexto en el que se encuentra la institución en donde se lleva a cabo la propuesta que se presenta, que si bien, el problema que se ataca no es de tipo administrativo, se debe considerar esta realidad para implementar un proyecto educativo que sea viable.

Por otra parte, analizando los contenidos y los lineamientos de los programas de Ministerio de Educación Pública (MEP), que fueron modificados a partir del 2012, se encuentra que se pretende dar énfasis a la geometría dinámica (MEP, 2012, p. 61) apoyándose en el uso de la tecnología. Claro que no se plantea la tecnología como un fin en sí misma sino con un fin pedagógico. Además, el Programa de Estudio sugiere utilizar el software libre Geogebra el cual será manipulado en esta investigación.

Debido a las condiciones geográficas en que se encuentra la institución surge una clara interrogante en cuanto a cómo implementar la tecnología en una zona con desventaja para este tipo de herramientas. Esto se soluciona con el apoyo de la fundación Omar Dengo, pues el Liceo Rural Gavilán forma parte del programa Redes Móviles para el Aprendizaje (REMA) desde el 2014. Dicho programa proporciona a cada estudiante una computadora portátil, para uso dentro y fuera de la institución. El objetivo general del Proyecto REMA es “favorecer el desarrollo integral de los estudiantes y de los liceos rurales para funcionar como impulsores del mejoramiento de la calidad de vida de sus comunidades” (Fundación Omar Dengo, 2013, p. 1).

Por otra parte, uno de los objetivos específicos del proyecto REMA es “favorecer en los jóvenes el desarrollo de sus capacidades intelectuales (resolución de problemas e investigación), personales (ciudadanía y comunicación), socioproductivas (productividad), a través de la apropiación de las tecnologías digitales móviles” (Fundación Omar Dengo, 2013, p. 1). Enlazando este objetivo con la propuesta del MEP, resulta importante guiar a los estudiantes en el uso de la tecnología buscando su fin pedagógico, como se mencionó anteriormente.

Esta descripción permite el planteamiento de una propuesta didáctica, que integra las herramientas tecnológicas que hay en la institución con los programas de estudio del MEP, con lo que se adaptó el siguiente problema ¿De qué manera impacta una unidad didáctica apoyada en Geogebra y el modelo de Van Hiele el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas, de los estudiantes de noveno año del Liceo Rural Gavilán, Valle la Estrella, Limón, Limón durante el segundo trimestre del 2016?

### **Objetivos de la investigación**

Los objetivos específicos de la investigación que se deriva del problema anterior son:

1. Diagnosticar el nivel de razonamiento de los estudiantes de noveno año, según el modelo de Van Hiele.
2. Elaborar una unidad didáctica apoyada en el software Geogebra para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP, según el modelo de Van Hiele.
3. Validar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de las habilidades específicas de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.
4. Implementar la unidad didáctica apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele.
5. Describir los niveles de razonamiento que muestran los cuatro estudiantes con la unidad didáctica apoyada en Geogebra según el modelo de Van Hiele.
6. Mejorar la unidad didáctica apoyada en software Geogebra y el modelo de Van Hiele para el desarrollo de las habilidades específicas de las de las razones trigonométricas del programa de estudio del MEP.

### **Sustento teórico. (Modelo Van Hiele)**

El uso del modelo de Van Hiele (Fouz y De Donosti, 2005), se fundamenta en las principales características que presenta:

1. Presenta 5 niveles de razonamiento (1. Razonamiento, 2. Análisis, 3. Deducción informal, 4. Deducción formal, 5. Rigor) y 5 fases de aprendizaje asociadas a los niveles: (1. Información, 2. Orientación dirigida, 3. Explicitación, 4. Orientación libre, 5. Integración).

2. Un estudiante solo puede comprender aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada manera. Pero sí se le puede ayudar mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.
4. Respecto a los niveles se tiene que no se puede alcanzar un nivel superior sin superar el nivel inferior.
5. Dos personas que estén en diferentes niveles no podrán comprenderse, es decir, hay una estrecha relación entre el lenguaje o los niveles.
6. El paso de un nivel a otro, ocurre de manera gradual.

Por otra parte, considerando los alcances de la investigación, según Algarín y Fiallo (2014) los niveles presentan las siguientes descripciones:

#### **Reconocimiento:**

- Proceso de descripción: Razonan sobre Conceptos básicos. Consideraciones visuales.
- Proceso de Definición: Descripción de propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos
- Proceso de demostración: No hay.

#### **Análisis**

- Proceso de descripción: Razonamiento de conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen propiedades necesarias del concepto.
- Proceso de definición: Descripción de las propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas.
- Proceso de demostración: tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico.

#### **Deducción informal**

- Proceso de descripción: No se da el proceso de descripción. Existe capacidad de comprender, usar y construir sus propias definiciones.
- Proceso de definición: Ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos. Construyen definiciones abstractas. Distinguen entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto.
- Proceso de demostración: Tipo ejemplo genérico intelectual y experimento mental transformativo.

El otro aspecto fundamental del modelo del Van Hiele son las fases de aprendizaje, y según Jaime y Gutiérrez (1990) se pueden resumir de la siguiente forma:

**Información:** Dirigir la atención de los estudiantes. Saber los conocimientos previos de los estudiantes respecto al tema a tratar.

**Orientación dirigida:** Conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos propiedades, etc. principales del área que se está estudiando. Construcción de elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

**Explicación:** Intercambio de ideas, experiencias, justificaciones, regularidades observadas, explicación de la resolución de las actividades. Busca el aprendizaje del nuevo vocabulario. Es una fase de revisión del trabajo realizado, no de aprendizaje de cosas nuevas.

**Orientación libre:** Problemas que puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento. Los problemas deben ser abiertos.

**Integración:** Formalización del conocimiento aprendido en las fases anteriores. No se debe aportar ningún concepto o propiedad nueva al estudiante.

### **Breve descripción de los contenidos y uso de la tecnología**

En relación con trigonometría los programas de estudio vigentes introducen la trigonometría en noveno año para favorecer la conexión con la geometría y el estudio con problemas reales. Los conocimientos expuestos son radianes, seno, coseno, tangente, razones trigonométricas de ángulos complementarios, ángulos de elevación y depresión y ley de senos, además en las indicaciones puntuales se sugiere introducir el uso del círculo trigonométrico para la conexión con la geometría analítica y el uso de radianes para la conexión con el área de medidas.

Acerca del uso de la tecnología en los procesos educativos, el MEP con los Programas de Estudio vigentes busca introducir las tecnologías de forma inteligente y oportuna, y además propone intensificar el uso de TIC en la educación matemática en el transcurso del tiempo, teniendo en cuenta el contexto institucional donde se desea implementar (MEP, 2012, p.60).

En cuanto a las tendencias generales de investigación en el uso de la tecnología para el aprendizaje y enseñanza de geometría, Lagrange, Arigue, Laborde y Troude (2003, citado por Laborde, et al, 2006, p. 291) sugieren cuatro dimensiones: la naturaleza de la geometría mediada por las computadoras, el diseño de tareas, el rol del feedback y el uso de las tecnologías en geometría por el profesorado.

Sobre el diseño de las tareas, algunas de las tareas elaboradas por los profesores utilizando software de geometría dinámica son: tareas en las cuales el ambiente facilita las acciones materiales pero no cambia la tarea para el estudiante (construir y medir); tareas que facilitan al estudiante la exploración y el análisis, las cuales permiten conocer las ideas de los educandos; tareas que tiene su contraparte en lápiz y papel pero pueden solucionarse de diferentes maneras en software de geometría dinámica; tareas que no pueden ser planteadas sin la mediación de software de geometría dinámica. (Laborde, 2001, citado por Laborde et al 2006, p. 293).

### **Investigaciones relacionadas**

La elaboración de la unidad didáctica demanda realizar un análisis de los antecedentes en cuanto a relaciones trigonométricas y la aplicación del modelo de Van Hiele. En términos generales a nivel internacional se dio énfasis a los estudios relacionados con los autores Gutiérrez y Fiallo, quienes han trabajado temas relacionados con el modelo de Van Hiele, geometría dinámica, geometría y trigonometría. Mientras que a nivel nacional se encuentran aportes relacionados con el modelo de Van Hiele y geometría aplicados a geometría, en relación con las razones trigonométricas solamente se halló el estudio de Chacón, Sánchez y Quirós (2007), al momento de realizar la revisión de la literatura de esta investigación.

Por otra parte, Gutiérrez (2005) hace una síntesis de los métodos para la recogida y análisis de datos en investigaciones basadas en el estudio de la demostración y el uso de software de geometría dinámica, para la recogida de datos menciona los archivos, auto-protocolo, registro de sesión, revisar la construcción, para el análisis de los datos señala tipos de arrastre, fases de resolución de problemas de demostración, tipos de demostraciones y unidad cognitiva de un teorema (Gutiérrez, 2005, p. 43).

Gutiérrez (2009) menciona que para enseñar los conocimientos relacionados con trigonometría se deben elaborar entornos motivadores, agradables e interesantes para los estudiantes, y que dichos entornos pueden elaborarse con software de geometría dinámica.

Fiallo y Gutiérrez (2012) en una investigación sobre trigonometría y el desarrollo de las habilidades de la demostración en un ambiente diseñado en Cabri, concluyen que las actividades diseñadas contribuyeron a mejorar el nivel de los estudiantes, y que “los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre actuar con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos” (Laborde, 2000, citado por Fiallo y Gutiérrez, 2012, p. 190)

Fiallo (2010), tenía como objetivo “aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica” (p. 6), entre las conclusiones, menciona que algunos estudiantes no aprovechan al máximo el diagrama dinámico, se enfocan solamente en el primer cuadrante del plano cartesiano o hacen un análisis estático del diagrama dinámico. Además en cuanto a la propuesta pedagógica empleada en Fiallo se concluye que el papel del profesor es fundamental para el alcance de los objetivos de aprendizaje y debe conocer la metodología empleada y el modelo de Van Hiele, en especial las fases de aprendizaje (Fiallo, 2010, p. 264).

En la investigación llevada a cabo en Algarín Torres y Fiallo Leal (2014), sobre los procesos de descripción, definición y demostración de los niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele cuando se estudian las razones trigonométricas, concluyeron que el uso de la tecnología facilita la reflexión y comunicación entre los estudiantes y profesor, favoreciendo la generalización, la deducción; también concluyen que las debilidades de los estudiantes en los conocimientos básicos de semejanza y congruencia de triángulos influyeron en el desarrollo de las actividades, lo que impidió cumplir con todas las actividades planteadas.

Acerca de las investigaciones desarrolladas en Costa Rica, sobre trigonometría destaca la investigación de Chacón, Sánchez y Quirós (2007) la cual fue un estudio exploratorio de enfoque cualitativo para investigar los niveles de comprensión de tres estudiantes de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR), el cual sugirió que la formación docente en el área de la trigonometría podría no satisfacer las necesidades mínimas para abordar ciertos temas de forma no mecánica.

Vargas y Gamboa (2013) investigaron sobre la enseñanza del teorema de Pitágoras apoyada en el software Geogebra y el modelo de Van Hiele con un enfoque cualitativo. En esta investigación se comparó dos grupos, uno donde las actividades se apoyaban con Geogebra y otro donde las actividades se apoyaban con papel y lápiz. Entre las conclusiones se menciona que

- las actividades apoyadas en Geogebra mejoran la motivación de los estudiantes, respecto a las actividades de enfoque tradicional,
- los estudiantes que realizaron las actividades apoyadas por Geogebra emitieron juicios más acertados sobre aquellos que usaron papel y lápiz,
- que los estudiantes no pudieron comunicarse de una forma matemática correcta, debido probablemente a la poca o nula importancia que se le da al lenguaje matemático en los diferentes niveles escolares.

### Algunas situaciones propuestas.

A partir de este escenario, se inicia con el desarrollo de las situaciones que darán lugar a la unidad didáctica que se pretende realizar en esta investigación. Es importante recalcar que las situaciones estarán en función de alguna de las fases de aprendizaje que establece en modelo Van Hiele. Así por ejemplo la siguiente situación, se relaciona con la fase de información:

Considere el triángulo escaleno  $\triangle ABC$ , cuya base mide 10 cm y dos de sus ángulos miden  $40^\circ$  y  $30^\circ$  (figura 1). Calcule el área de este triángulo. Justifique su respuesta.

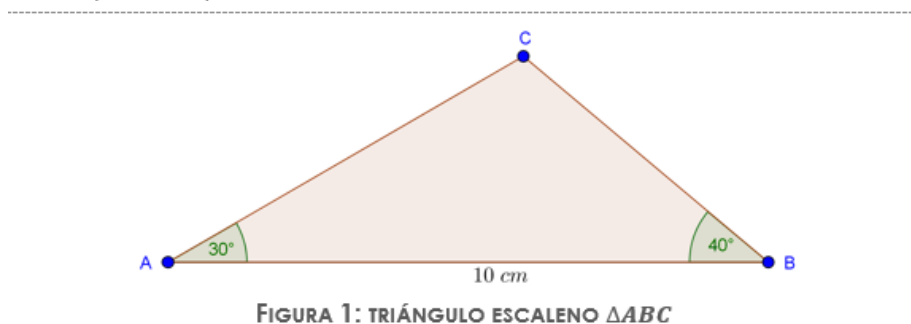


Figura 1.

Este problema, con los conocimientos previos que tienen los estudiantes, puede ser resuelto por aproximación. Ya sea construyendo la figura, buscar cómo aproximar el valor de la altura, entre otros. Sin embargo, es evidente que muestra la necesidad de que hace faltan herramientas o contenidos para calcular de forma exacta el área. Además, esta situación se puede contextualizar de manera sencilla llevando a los estudiantes a considerar la importancia de los contenidos que se evalúan, permitiendo que se despierte el interés por los próximos temas que se verán.

Considerando una situación que esté más ligada a la fase de orientación dirigida, y donde se vincule el uso del Software Geogebra se puede plantear el siguiente problema:

Actividad 2. Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

#### Razón Matemática:

es una comparación entre dos magnitudes. Se obtiene al dividir una de las magnitudes o cantidades por otra. Estas pueden expresarse en fracciones o en decimales.

1. Abre el archivo TriánguloRectángulo.ggb. Escriba en el folleto de trabajo todo lo que pensó e hizo para encontrar su respuesta y justificarla.

a) Calcule las razones entre los lados del triángulo  $\triangle ABC$  dadas en la siguiente tabla.

Razón
$\frac{AC}{AB} =$
$\frac{BC}{AB} =$
$\frac{BC}{AC} =$

Figura 2.

La apariencia del archivo *TriánguloRectángulo.ggb* se presenta en la figura 3.

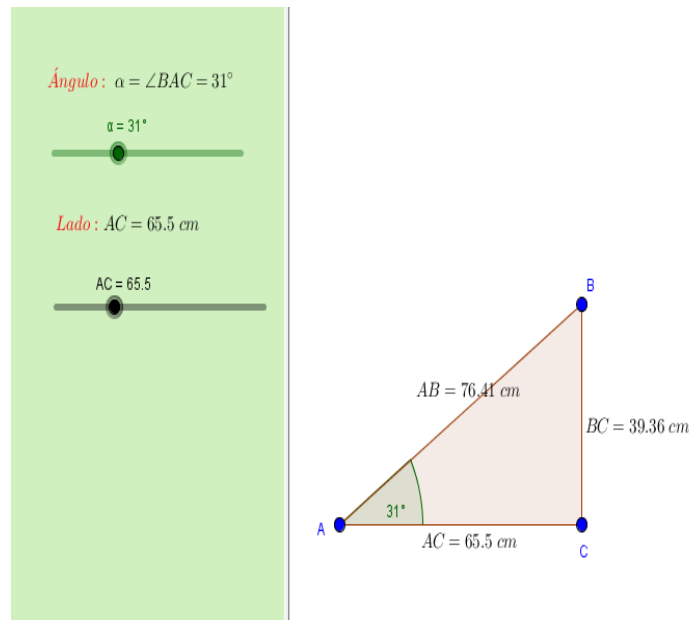


Figura 3.

Esta actividad le permite al estudiante limitar los principales elementos que se pretende estudiar mientras que es claro cómo se produce la vinculación del uso del software, los contenidos y las habilidades que desarrolla el estudiante.

El producto final, que involucre todas las situaciones desarrolladas (abarcando todo el tema de relaciones trigonométricas) y validadas se encuentra en desarrollo para la fecha. Sin embargo, se cuenta con el aval de la institución para ponerlo en práctica con un grupo real de estudiantes.

## Referencias Bibliográficas

- Algarín, D. y Fiallo, J. (2014). Descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración para los niveles de Van Hiele cuando se estudian las razones trigonométricas. *Uni-Pluri/Versidad*, 14(1), 42-52.
- Chacón, A., Sánchez, A., y Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31.
- Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de Desmostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica. (Tesis Doctoral). Universitat de València: Valencia.

- Fiallo, J., y Gutiérrez, A. (2012). Unidad de enseñanza para las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. *Investigaciones en educación geométrica*, 173-192.
- Fundación Omar Dengo. (2013). Acerca de REMA (Redes Móviles para el Aprendizaje). Recuperado de [www.fod.ac.cr](http://www.fod.ac.cr):  
[http://www.fod.ac.cr/rema/index.php?option=com\\_content&view=article&id=10&Itemid=106](http://www.fod.ac.cr/rema/index.php?option=com_content&view=article&id=10&Itemid=106)
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, 26-44.
- Gutiérrez, A., y Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. *Geometría dinámica*, 147-171.
- Laborde, C., Kynigos, C., Holebrands, K., y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 275-304.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas. San José, Costa Rica.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del Geogebra, según el modelo de Van Hiele. *UNICIENCIA*, 27(1), 95-118.